Последняя теорема Ферма: вызов на столетия

Содержание I

1. Краткая история вопроса: от постановки проблемы до наших дней
2. Уравнение Пифагора
3. Биквадратное уравнение: метод бесконечного спуска, площадь пифагорова треугольника, вывод неразрешимости
4. Основные продвижения в поисках доказательства
5. Как, кем и когда проблема решена
6. Комбинаторная переформулировка
7. Ошибочные доказательства
8. В поисках элементарного доказательства: что мог иметь в виду сам Ферма?

Краткая история вопроса: от постановки проблемы до наших дней I

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Пьер Ферма (1601 — 1665) и титульный лист «Арифметики» Диофанта с комментариями П. Ферма

Краткая история вопроса: от постановки проблемы до наших дней II

Все античные знания об уравнениях в целых и рациональных числах изложил Диофант Александрийский (III в. до н.э.) в своем знаменитом трактате «Арифметика», который стал отправной точкой для теоретико-числовых исследований Пьера Ферма (1601 — 1665), Леонарда Эйлера (1707 — 1783), Карла Гаусса (1777 — 1855) и других математиков.

На полях изданного собрания трудов Диофанта Ферма записал:

> *«Невозможно разложить куб на два куба, биквадрат — на два биквадрата и, в общем случае, любую степень, большую двух, в сумму таких же степеней; я нашел поистине чудесное доказательство, но эти поля слишком узки, чтобы его вместить».*

Краткая история вопроса: от постановки проблемы до наших дней III

На современном языке это значит следующее.

(A) *Пусть n — произвольное натуральное число, большее 2. Тогда уравнение*

$$X^n + Y^n = Z^n$$

не имеет решений в целых числах, каждое из которых отлично от 0 (т. е. оно имеет лишь тривиальные решения, где одно из чисел X, Y, Z равно 0).

Это утверждение было названо *последней теоремой* (*гипотезой* или *проблемой*) *Ферма*. Также широко употребляется термин «великая теорема Ферма».

Краткая история вопроса: от постановки проблемы до наших дней IV

На протяжении трех с половиной веков математики — как ученые с мировым именем, так и находчивые любители — пытались доказать знаменитое утверждение Ферма. Изобретались новые подходы, создавались очень сложные теории.

Однако несмотря на многочисленные попытки, ни современникам Ферма, ни последующим исследователям найти «чудесное доказательство» не удалось. Утверждение оставалось недоказанным до конца XX века.

Долгожданное доказательство было найдено Эндрю Уайлсом лишь в 90-х годах XX в. В нем были задействованы арифметическая теория эллиптических кривых, теория модулярных форм и т.д.

Краткая история вопроса: от постановки проблемы до наших дней V

Очевидно, что для того, чтобы доказать теорему Ферма для всех показателей $n \geqslant 3$, достаточно доказать её для показателя 4 и всех нечетных простых показателей p.

В случае нечетных простых показателей p различают два случая теоремы Ферма.

1) *Первый случай теоремы Ферма* имеет место, если для любых отличных от нуля целых чисел x, y, z, не кратных p, выполнено соотношение $x^p + y^p \neq z^p$.

2) *Второй случай теоремы Ферма* имеет место, если для любых отличных от нуля попарно взаимно простых целых чисел x, y, z, таких, что p делит xyz, выполняется соотношение $x^p + y^p \neq z^p$. В этом случае p делит ровно одно из чисел x, y, z.

Уравнение Пифагора I

Кратко остановимся на уравнении Пифагора

$$X^2 + Y^2 = Z^2. \tag{1}$$

Тройка положительных целых чисел (x, y, z), таких, что $x^2 + y^2 = z^2$, называется *пифагоровой тройкой*. Например, $(3, 4, 5)$ — пифагорова тройка, поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Примитивными решениями называются решения (x, y, z) уравнения (1) такие, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, x четно и $\text{НОД}(x, y, z) = 1$, откуда y и z нечетны.

Методы нахождения решений уравнения (1) предложили Пифагор и Платон, Евклид (геометрический метод), Диофант.

Интересный метод нахождения решений привел в 1225 г. Леонардо Пизанский (Фибоначчи).

Уравнение Пифагора II

Все примитивные решения уравнения Пифагора задаются равенствами

$$x = 2ab, \qquad y = a^2 - b^2, \qquad z = a^2 + b^2,$$

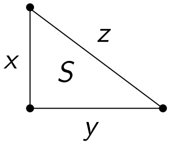
где целые числа a и b таковы, что $a > b > 0$ и $\text{НОД}(a, b) = 1$, причем a и b различной четности. Нетрудно видеть, что различным парам (a, b) соответствуют различные тройки (x, y, z).

Наименьшие примитивные решения, упорядоченные по возрастанию значений z, таковы:

$$\begin{array}{llll}
(4,3,5), & (12,5,13), & (8,15,17), & (24,7,25), \\
(20,21,29), & (12,35,37), & (40,9,41), & (28,45,53), \\
(60,11,61), & (56,33,65), & (16,63,65), & (48,55,73).
\end{array}$$

Биквадратное уравнение I

Перейдем к случаю $n = 4$. Ферма рассматривал вопрос, может ли площадь пифагорова треугольника быть квадратом целого числа (наблюдение к Вопросу 20 Книги VI «Арифметики» Диофанта).



Это привело его к уравнению

$$X^4 - Y^4 = Z^2, \tag{2}$$

и он доказал (дата неизвестна) следующее утверждение.

(B) *Уравнение (2) не имеет решений в целых числах, каждое из которых отлично от нуля.*

Биквадратное уравнение II

Доказательство утверждения (B) проводится *методом бесконечного спуска*, принадлежащим Ферма.

Кратко его можно сформулировать так: если бы тройка (x_0, y_0, z_0) являлась решением уравнения (2) в натуральных числах, то нашлось бы еще одно решение этого уравнения в натуральных числах (x_1, y_1, z_1), где $x_1 < x_0$. Повторяя этот процесс, мы получили бы бесконечную убывающую последовательность натуральных чисел

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots ,$$

что невозможно.

Следующие два утверждения являются следствиями утверждения (B).

Биквадратное уравнение III

(C) *Площадь пифагорова треугольника не является квадратом целого числа.*

Это исходное утверждение Ферма, предложенное в качестве задачи или упомянутое в письмах Мерсенну, Паскалю и др.

(D) *Уравнение*

$$X^4 + Y^4 = Z^4$$

не имеет решений в целых числах, каждое из которых отлично от 0*.*

Действительно, если x, y и z — отличные от нуля целые числа, такие, что $x^4 + y^4 = z^4$, то $z^4 - y^4 = (x^2)^2$, что противоречит утверждению (B).

Основные продвижения в поисках доказательства I

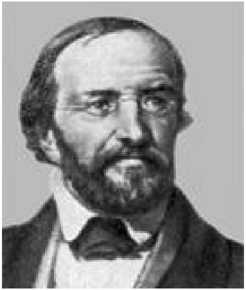
1. Случай $n = 3$**.** Впервые доказательство (также основанное на методе бесконечного спуска) предложил Леонард Эйлер (1770). В нем были некоторые пробелы, которые в дальнейшем были устранены. Строгое доказательство дал в 1901 г. Эдмунд Ландау.

Леонард Эйлер (1601 — 1665)

Эдмунд Ландау (1877 — 1938)

Основные продвижения в поисках доказательства II

2. Случай $n = 5$**.** Впервые для этого случая доказательство дали независимо П. Г. Дирихле и А. Лежандр (около 1830). Другие доказательства предложили В. А. Лебег (1843) и К. Ф. Гаусс (опубликовано в 1863).



Петер Густав Дирихле (1805 — 1859)

Карл Фридрих Гаусс (1777 — 1855)

Основные продвижения в поисках доказательства III

3. Случай $n = 7$**.** Доказательство представил Г. Ламе (1839), затем В. А. Лебег (1840) и позднее другие математики (более простые доказательства).

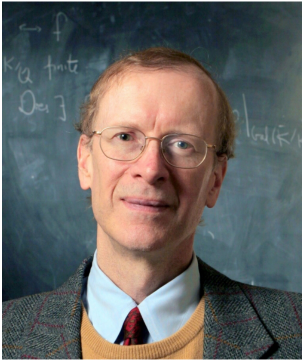
Габриель Ламе (1795 — 1870)

Софи Жермен (1766 — 1831)

4. Другие случаи. Многие математики предлагали доказательства для различных показателей. Софи Жермен (1766 — 1831) дала доказательство первого случая для всех простых показателей $p < 100$.

Как, кем и когда проблема решена I

Полное доказательство последней теоремы Ферма для всех показателей дал английский математик Э. Уайлс (1994).



Эндрю Уайлс (род. 1953)

Как, кем и когда проблема решена II

23 июня 1993 г. на своей лекции в Институте Ньютона в Кембридже, Англия, Э. Уайлс объявил о доказательстве последней теоремы Ферма. В рукописи Уайлса, тщательно изученной различными экспертами, обнаружились некоторые пробелы, которые были устранены в 1994 г.

Более точно, Уайлс доказал *гипотезу Шимуры–Таниямы* о модулярности эллиптических кривых, из которой, как было показано ранее, следует справедливость великой теоремы Ферма.

Доказательство занимает больше ста страниц. В нём задействованы арифметическая теория эллиптических кривых, теория модулярных форм и теория представлений Галуа и их деформаций, развитые рядом математиков.

Комбинаторная переформулировка I

Существует множество переформулировок великой теоремы Ферма — утверждений, которые ей эквивалентны. Приведем одну неожиданную комбинаторную формулировку (Квайн, 1989).

Пусть $n \geqslant 3$ шаров требуется распределить по z корзинам, окрашенным в белый, синий или красный цвет. Обозначим через (rb) число таких размещений, что не все синие и красные корзины пусты, а через (w) — число таких размещений, что все шары сосредоточены в белых корзинах.

(E) *Последняя теорема Ферма справедлива для показателя n тогда и только тогда, когда $(rb) \neq (w)$ для всех множеств из z корзин.*

Ошибочные доказательства I

За долгие столетия были предложены буквально тысячи ошибочных доказательств последней теоремы Ферма. Это можно объяснить тем, что формулировку данной задачи легко поймет даже любитель. Кроме того, академии и фонды предлагали значительные премии, которые стимулировали попытки как дилетантов, так и профессиональных математиков.

Статьи с ошибочными доказательствами публиковались даже в солидных математических журналах (ошибки в них указывались позднее, уже после публикации). Среди авторов ошибочных доказательств можно отметить известного математика Ф. Линдемана, который впервые доказал трансцендентность числа π. Некоторые авторы предлагали по нескольку десятков неверных доказательств, одно за другим.

Ошибочные доказательства II

Попытки найти элементарное доказательство не прекращаются и по сей день.

Так, в августе 2005 года многие СМИ объявили о том, что омский ученый Александр Ильин нашел простое доказательство великой теоремы Ферма. Новость об этом даже попала на телевидение. Вот цитата из этого «доказательства», опубликованного в «Новой газете»:

> *Любой десятиклассник, у которого по математике выше тройки, с ходу воспроизведет вам формулу соотношения сторон треугольника* $Z^2 = X^2 + Y^2 - 2XY \cos B$. *При* $60^\circ < B < 90^\circ$ $\cos B$ *— число не целое. А значит, и* Z *неминуемо является таковым при целых значениях* X *и* Y. *Что и требовалось доказать.*

Ошибочные доказательства III

В приведённом отрывке содержится заведомо неверное утверждение: из того, что число $\cos B$ не целое, не следует, что $2XY \cos B$ (а значит и Z) не целое. В тексте доказательства есть много и других ошибок.

Еще более сложны для рассмотрения другие замысловатые и более объёмные «доказательства». Большое их количество можно найти в различных источниках (брошюрах, изданных на средства авторов, сети Интернет и т.п.).

Еще больше попыток доказательства присылались энтузиастами профессиональным математикам на проверку и не публиковались после указания на ошибки, найти которые — часто непростой труд.

В поисках элементарного доказательства: что мог иметь в виду сам Ферма? I

Многие считают, что Ферма ошибался, считая, что располагал полным доказательством своей теоремы.

Вероятно, доказательство, о котором он писал, применимо лишь для некоторых значений n и представляет собой вариант метода бесконечного спуска.

В одной из работ Эйлера содержится рассуждение, принадлежащее Лекселю (Lexell A.J.). Оно представляет собой попытку применить метод бесконечного спуска к уравнению Ферма, что и мог иметь в виду сам Ферма. При этом оно показывает, что метод спуска в общем случае неприменим.

Заключение I

Итак, многовековые поиски «чудесного доказательства», о котором писал Ферма на полях «Арифметики» Диофанта, так и не привели к успеху.

Однако попытки многих учёных доказать теорему Ферма привнесли много интересных идей в самые разные направления не только теории чисел, но и других областей математики. Один из ярких примеров — создание теории алгебраических чисел, к которому привело именно изучение теоремы Ферма.

В процессе поиска решения знаменитой проблемы было получено множество замечательных результатов, которые существенно обогатили мир математики.